
Mesure des inégalités et dominance sociale : un chassé-croisé entre économistes et mathématiciens

Measure of inequality and social dominance: an implausible meeting between economists and mathematicians

Alain Trannoy



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/11904>

DOI : 10.4000/msh.11904

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2010

Pagination : 29-40

ISBN : 0987 6936

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Alain Trannoy, « Mesure des inégalités et dominance sociale : un chassé-croisé entre économistes et mathématiciens », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 192 | Hiver 2010, mis en ligne le 31 mars 2011, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/11904> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.11904>

MESURE DES INÉGALITÉS ET DOMINANCE SOCIALE : UN CHASSÉ-CROISÉ ENTRE ÉCONOMISTES ET MATHÉMATIENS

Alain TRANNOY¹

RÉSUMÉ – *Le siècle a vu se dérouler un étonnant chassé-croisé entre économistes et mathématiciens dans l’appréhension de la mesure de l’inégalité dans l’approche de la dominance sociale. On ne vise pas un classement complet des distributions mais un classement robuste qui prenne en compte des divergences possibles dans les points de vue sur l’appréhension de la mesure des inégalités. Nous passons en revue les points de vue formulés par les économistes et on montre comment les économistes et les mathématiciens ont travaillé sur les mêmes objets sans le savoir pendant une grande partie du XX^e siècle. La clé de voute est le théorème d’Hardy-Littlewood-Polya qui établit l’équivalence entre toutes les différentes conceptions de l’inégalité. On fait état enfin des difficultés pour étendre ce théorème au cas multidimensionnel.*

MOTS CLÉS – Courbe de Lorenz, Dominance stochastique, Inégalité, Transfert progressif

SUMMARY – Measure of inequality and social dominance: an implausible meeting between economists and mathematicians.

Economists and mathematicians have worked on the same objects related to the measuring income inequalities without much communicating throughout the 20th century. In the social dominance approach we are not looking for a complete ranking of income distributions. We are happy with a robust ranking of the distributions which takes into account the difference in appraisal. We exposed the three main points of view formulated by economists before exposing the theorem of Hardy-Littlewood Polya theorem which establishes the equivalence among them. Finally, we evoke the difficulties of extending this theorem beyond the one-dimensional case.

KEYWORDS – Inequalities, Lorenz curve, Progressive transfer, Stochastic dominance

*It is obvious that there is no room in economics for long strains of deductive reasoning ... It may indeed appear at first sight that the contrary is suggested by the frequent use of mathematical formulae in economics. But on investigation it will be found that this suggestion is illusory, except perhaps when a pure mathematician uses economic hypotheses for the purpose of mathematical diversion; For then his concern is to show the potentialities of mathematical methods on the supposition that material appropriate to their use has been supplied by economic study. He takes no technical responsibility for the material, and is often unaware how inadequate the material is to bear the strains of his powerful machinery. [Alfred Marshall, *Principles*, 1920, p. 781].*

¹Groupement de Recherche en Économie Quantitative – Institut d’Économie Publique (GREQAM-IDEPE), École des hautes études en sciences sociales, Vieille Charité, 2 rue de la Charité, 13002 Marseille, alain.trannoy@univmed.fr

1. INTRODUCTION

La mesure des inégalités dans les problèmes distributifs constitue un exemple d'intérêts parallèles pour les mêmes objets de la part des mathématiciens et des économistes. Les mathématiques constitue toujours une boîte à outils pour l'économiste et ceci depuis le début de la discipline. Dès le tableau économique d'ensemble de Quesnay, l'économiste a tenté de mettre le monde en équation. Cette préoccupation formelle le distingue des autres sciences sociales et en particulier de la sociologie, où au contraire, on s'est plutôt attaché à montrer que c'était une tentative vaine, voire dangereuse car elle rend moins transparent des présupposés idéologiques. Le domaine de la mesure des inégalités est spécifique dans la mesure où il constitue un exemple de relation réciproque où l'économie peut être vue comme une « boîte » à problèmes pour le mathématicien. En fait, un travail parallèle et indépendant sur les mêmes objets mathématiques a été accompli dans les deux disciplines. Le but de cet article est de montrer cette imbrication entre les travaux des économistes et ceux des mathématiciens. Deux types de questions font appel à des domaines différents des mathématiques. D'une part, celle de classer des distributions d'objets selon leur plus ou moins grande inégalité : il s'agit d'établir un classement partiel valable pour une classe d'indicateurs d'inégalité. Le qualificatif en anglais attribué par les mathématiciens est celui de *majorization* et le livre de référence est celui publié par Marshall and Olkin *Inequalities: Theory of majorization and its application* [1979] qui poursuit celui de Hardy Littlewood and Polya *Inequalities* [1934]. La seconde famille de problèmes s'intéresse à la décomposition de l'inégalité. Plusieurs facteurs apparaissent comme des déterminants potentiels des inégalités, sexe, âge, localisation par exemple. Il s'agit d'attribuer une part de l'inégalité à chaque facteur. Le domaine des mathématiques qui est impliqué est celui des équations fonctionnelles. Dans cet article, nous nous restreignons au premier problème qui est central dans la construction du corpus des économistes quant à la mesure des inégalités. Nous commencerons par exposer une famille de problèmes distributifs unidimensionnels pour ensuite aborder les points de vue avec lesquels on peut approcher la notion d'inégalité puis ensuite nous présenterons le théorème d'équivalence fondamental dans le cas unidimensionnel. Ce théorème est le point d'aboutissement d'une recherche de *robustesse* dans la mesure des inégalités. Il s'agit d'essayer de disposer d'un classement qui tient compte du fait qu'en matière de mesure des inégalités, les jugements de valeur des décideurs peuvent différer en partie. Toute la subtilité de l'analyse réside dans l'appréciation de ce « en partie » et dans sa traduction formelle. Ensuite nous ferons état des difficultés pour étendre le résultat au cas multidimensionnel.

2. FORMULATION DES PROBLÈMES DE DISTRIBUTION

La formulation générale d'un problème de distribution fait intervenir :

- une population d'individus décrite par N ;
- un ensemble de conséquences possibles C supposé le même pour chaque individu ;
- une distribution est une application de N dans C . L'ensemble des distributions : $X = C^N$.

Pour x dans X et i dans N , x_i désigne la dotation de l'individu i .

Les deux exemples classiques sont :

EXEMPLE 1. *Distributions de revenu entre n individus identiques*

$$\begin{aligned} N &= \{1, \dots, n\} \\ C &= \mathbb{R}_+ \\ X &= \mathbb{R}_+^n \\ X &= S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \end{aligned}$$

EXEMPLE 2. *Distribution de revenu entre un continu d'individus*

$$\begin{aligned} N &= [0, 1] \\ C &= \mathbb{R}_+ \\ X &= \mathbb{R}_+^{[0,1]} \end{aligned}$$

En fait nous limitons notre attention à l'ensemble des distributions de probabilité P à support compact contenu par exemple dans $[0,1]$. F, G sont les fonctions de distributions respectives de P et Q . Il est à noter que l'exemple 1 peut se formuler comme la donnée de $P_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ dans l'exemple 2.

3. TROIS POINTS DE VUE DIFFÉRENTS SUR L'INÉGALITÉ

On présentera trois critères conçus par les économistes dont le critère très connu de la courbe de Lorenz qui appartient aussi aux statistiques et à toutes les sciences sociales. Les économistes ont également forgé un critère qui s'enracine dans le corpus théorique qui leur est propre et en particulier la notion de bien-être. L'inégalité est alors appréhendée comme une perte de bien-être. Un deuxième critère est plus factuel, il consiste à réfléchir au concept de distributions très voisines qui ne diffèrent que par une transformation élémentaire, un transfert entre deux individus. Nous donnons les définitions formelles pour l'exemple 1.

3.1. L'INÉGALITÉ COMME PERTE DE BIEN-ÊTRE

Le critère bien-être est présenté chez Edgeworth [1881] mais l'idée de base est déjà présente chez Bentham [1822]. *All inequality is a source of evil - the inferior loses more in the account of happiness than the superior is gained.* L'inégalité entraîne une perte de bien-être par rapport à un partage égal et donc une distribution est moins inégale qu'une autre si la perte de bien-être induite est moins importante.

Pour formaliser ce premier critère, on définit le bien-être individuel au moyen d'une fonction d'utilité du revenu $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Elle ne dépend que du revenu individuel et aucun concernement collectif ne tarade les individus. La fonction d'utilité est posée comme identique car les individus sont identiques dans le problème de distribution unidimensionnelle. S'ils sont différents par leurs préférences en matière de revenu, il faudrait introduire ce paramètre de différence de préférence dans la fonction d'utilité (cf. exemple 3 à la fin de l'article pour une formalisation possible).

Le signe de la dérivée première est supposée positive : l'utilité marginale est positive.

Le signe de la dérivée seconde est supposée négative : l'utilité marginale décroît.

Donc u est une fonction inconnue mais croissante et concave. Notons $U2$ l'ensemble des fonctions concaves.

Le bien-être collectif se conçoit aisément dans ce cadre ultra-simplifié. Comme les individus sont identiques, les comparaisons interpersonnelles d'utilité ne sont pas ambiguës. À la suite du courant utilitariste, le bien-être se définit par la somme des utilités :

$$W(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i)$$

et il est maximum pour une distribution égalitaire en raison de la propriété de concavité. En conséquence, toute distribution inégalitaire crée une perte de bien-être par rapport à la distribution égalitaire.

À partir de cette définition du bien-être collectif, on définit une relation binaire entre les distributions possibles qui est un préordre ou quasi-ordre, \succ_w , pour lequel la distribution dominante apporte plus de bien-être quelle que soit la fonction concave qui transforme le revenu en utilité.

$$x \succ_w y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u(x_i) \geq \sum_{i=1}^n u(y_i) \quad \forall u \in U_2$$

La recherche de robustesse se traduit par l'exigence que le classement des deux distributions doit rester valide quelle que soit la fonction d'utilité concave. En somme, l'observateur est supposé égalitariste puisque la distribution égalitaire est celle qui sature le bien-être collectif. Cependant, dans le cheminement vers l'égalité parfaite, des divergences d'opinion sont permises et se traduisent par une forme de concavité spécifique.

3.2. LE CRITÈRE DES TRANSFERTS DE PIGOU-DALTON

Avec le second critère, on cherche à comparer des distributions très voisines. L'économiste Sir Arthur Cecil Pigou, un disciple d'Alfred Marshall à Cambridge, invente en 1912 le concept de transfert progressif pour une distribution réduite à deux individus .

Un transfert d'un montant $\Delta > 0$ du plus riche au plus pauvre diminue l'inégalité, à condition que l'écart de revenu entre les deux individus ne soit pas plus élevé après.

Un transfert de j à i est progressif si :

$$y_i \leq \min\{y_i + \Delta, y_j - \Delta\} \leq \max\{y_i + \Delta, y_j - \Delta \leq y_j\}$$

Hugh Dalton, qui fera une carrière politique et sera Chancelier de l'Échiquier dans un gouvernement travailliste, étend le principe des transferts de Pigou à une société quelconque de n individus dans un article de l'*Economic Journal* de 1920. L'extension vaut si les individus non concernés par le transfert conservent le même niveau de revenu. L'extension n'est pas aussi naturelle qu'il y paraît au premier abord. Elle contient un principe d'indépendance qui n'est pas neutre. Soient $x_1 = (2, 4, 6, 10)$ et $x_2 = (2, 5, 5, 10)$ Quelle est la distribution la plus égale ? Dalton répond que la seconde l'est car le troisième individu, en rangeant les individus par revenu croissant dans la distribution initiale, a transféré un revenu d'une unité au second individu. Néanmoins, un nombre de sujets très appréciable confronté à ce type de choix dans des questionnaires refuse une telle conclusion (cf. [Amiel et Cowell, 1992]). Quoi qu'il en soit, on peut définir une seconde relation

binaire, \succ_{PD} , à partir du principe des transferts de Pigou-Dalton. $x \succ_{PD} y \Leftrightarrow$ la distribution x se déduit de y par une suite finie de transferts progressifs.

3.3. LE CRITÈRE STATISTIQUE DE LA COURBE DE LORENZ

La courbe de Lorenz inventé en 1905 par un jeune économiste au cours de son PhD, demande à ce que l'on classe les individus par revenu croissant. Introduisons donc

$$\begin{aligned} x_{(1)} &\leq \dots \leq x_{(n)} \\ x_{\uparrow} &= (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \end{aligned}$$

Pour x dans le simplexe, les ordonnées de la courbe de Lorenz sont définies par toutes les sommes partielles $\sum_{i=1}^p x_{(i)}, \forall p = 1, \dots, n$.

De cette façon on peut définir une troisième relation binaire, \succ_L , où la distribution dominante correspond à la courbe de Lorenz la plus élevée.

$$x \succ_L y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^p y_{(i)} \quad \forall p = 1, \dots, n.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$ la courbe de Lorenz est établie à partir des parts de revenus, c'est-à-dire, des revenus rapportés à la moyenne arithmétique de la distribution.

$$x \succ_L y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \frac{x_{(i)}}{\mu_x} \geq \sum_{i=1}^p \frac{y_{(i)}}{\mu_y} \quad \forall p = 1, \dots, n$$

Serge-Christophe Kolm en 1976 [Kolm, 1976(a)] a attiré l'attention sur le fait que cette normalisation par division de la moyenne n'est pas neutre sur le plan éthique. La soustraction par la moyenne aboutirait au critère de Lorenz *absolu* qui s'oppose ainsi au critère de Lorenz habituel *relatif*.

4. LES ÉQUIVALENCES : UN CHEMINEMENT PARALLÈLE ENTRE ÉCONOMISTES ET MATHÉMATIENS

Nous évoquons à présent le long cheminement de l'obtention des équivalences entre ces trois conceptions différentes des inégalités. Les mathématiciens Hardy, Littlewood et Polya ont déjà obtenu les équivalences en 1929 pour le cas discret. En langue française, la connaissance se répand grâce au livre de Claude Berge *Topologie, Espaces Multivoques, Convexité* [1960]. Serge-Christophe Kolm est le premier économiste à comprendre l'intérêt du théorème en 1966 dans une conférence d'économie publique à Biarritz mais sans citer les travaux des mathématiciens et en adoptant une terminologie personnelle, la préférence pour plus d'égalité au sens du critère de la courbe de Lorenz étant qualifié d'*isophilie*. Le grand Paul Samuelson, dont l'influence à l'époque est au zénith, le ridiculise pourtant en déclarant « comment le lapin a-t-il pu être mis dans le chapeau ? ». Armatya Sen avec deux autres auteurs en 1973 [Dasgupta *et alii*, 1973] révèle l'importance du théorème à l'ensemble de la communauté des économistes. Entre-temps, Antony Atkinson établit en 1970 pour le cas continu l'équivalence entre Lorenz et bien-être en s'appuyant sur un résultat de Rothschild-Stiglitz [1970] en situation de risque

obtenu la même année. Le prix Nobel attribué à Armatya Sen pour l'ensemble de l'oeuvre mentionne heureusement les contributions de Kolm et d'Atkinson. Nous commençons par évoquer les résultats des économistes établis indépendamment de celles des mathématiciens.

4.1. LES ÉQUIVALENCES OBTENUES PAR LES ÉCONOMISTES : L'IMPORTATION DES RÉSULTATS DE DOMINANCE STOCHASTIQUE

Les équivalences sont énoncées dans le cadre de l'exemple 2. Elles concernent l'équivalence entre le quasi-ordre bien-être et le quasi-ordre de Lorenz dans le cas des distributions de probabilité continues. Nous introduisons d'abord la notion de dominance stochastique au deuxième ordre apparue dans la théorie du risque à la fin des années 60. Ce critère n'a pas d'interprétation économique. Son intérêt vient de son équivalence avec les autres notions et de ce qu'il permet de construire un test des relations de dominance.

DÉFINITION 1. *Définition de la dominance stochastique au second ordre si :*

$$P \succ_{DS_2} Q \Leftrightarrow \int_0^z F(x)dx \leq \int_0^z G(x)dx \quad \forall z = [0, 1]$$

Quand il s'agit de distribution de revenu et non de distribution de probabilité, on peut employer le terme de dominance sociale plutôt que de dominance stochastique. Le préordre de bien-être dans le cas continu substitue simplement l'intégrale au signe somme.

DÉFINITION 2.

$$P \succ_W Q \Leftrightarrow \int_0^1 u(x)P(dx) \leq \int_0^1 u(x)Q(dx)$$

pour tout u appartenant à U_2 .

Le résultat fondamental obtenu par Rothschild et Stiglitz [1969] est l'équivalence entre le préordre de dominance stochastique et le préordre bien-être.

THÉORÈME 1. (Rothschild et Stiglitz, [1969]). *Soient P et Q deux distributions de probabilité de même espérance.*

$$P \succ_{DS_2} Q \Leftrightarrow P \succ_W Q$$

Dans le cas continu, la courbe de Lorenz nécessite de définir l'inverse de la fonction de répartition. Adoptons comme convention $F^{-1}(p) = \min[x : F(x) \geq p]$. Alors la courbe de Lorenz relative se définit par :

$$L_F(p) = \frac{1}{E_p(x)} \int_0^p F^{-1}(t)dt \quad \forall p = [0, 1]$$

en notant $E_p(x)$ l'espérance mathématique.

THÉORÈME 2. (Atkinson, [1970]). *Soient P et Q deux distributions de probabilité de même espérance*

$$P \succ_L Q \Leftrightarrow P \succ_W Q$$

4.2. LA MOISSON DES MATHÉMATIENS, LA RÉVÉLATION D'UNE QUATRIÈME PERSPECTIVE SUR L'INÉGALITÉ : LA PAUVRETÉ

On peut dire que dès les années 30, les mathématiciens avaient obtenu toutes les équivalences possibles entre les différentes conceptions des inégalités dans le cas discret (exemple 1). De plus d'autres préordres apparaissent avec des interprétations intéressantes pour les économistes comme les préordres de pauvreté.

4.2.1. Équivalence entre critère bien-être et dominance stochastique

Commençons par observer que le théorème sur la dominance stochastique du second ordre énoncé ci-dessus a été découvert et étendu par Karamata dès 1932 au cas de distributions de probabilité quelconques. Dans sa preuve, Karamata utilise le très utile résultat d'approximation suivant : soit u une fonction croissante et concave. Alors elle est limite uniforme de combinaisons linéaires positives de fonctions de la forme :

- (1) fonctions affines croissantes ;
- (2) fonctions « angles » du type : $(x - z)^- = \min(x - z, 0)$.

Ces dernières fonctions élémentaires sont très importantes car elles constituent l'équivalent d'une base pour les fonctions croissantes et concaves. Si une propriété est vraie pour l'ensemble de ces fonctions, elle doit être vérifiée en particulier pour celles-là. Ainsi, on dispose d'une façon particulièrement élégante et rapide de prouver les résultats d'équivalence impliquant le quasi-ordre bien-être (cf. [Lebreton, 1986] pour des développements).

4.2.2. Équivalence entre critère bien-être et critère de Lorenz

L'équivalence entre quasi-ordre de Lorenz et quasi-ordre bien-être a été obtenue par Hardy-Littlewood-Polya dès 1929 à partir de la notion de *majorisation* en classant les individus par ordre décroissant, qui est le pendant de la notion de courbe de Lorenz, lorsqu'on classe les individus en commençant par le plus riche. Invertissons donc la relation de classement des individus :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &\geq \dots \geq x^{(n)} \\ x_{\downarrow} &= (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.

$$x \underset{M}{\prec} y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p x^{(i)} \geq \sum_{i=1}^p y^{(i)} \quad \forall p = 1, \dots, n-1$$

THÉORÈME 3.

$$x \underset{M}{\prec} y \Leftrightarrow x \underset{W}{\succ} y$$

Dans la preuve, les trois mathématiciens utilisent les fonctions « angles » de Karamata et un nouveau quasi-ordre intéressant apparaît, celui des montants de pauvreté. Énonçons les théorèmes jumeaux suivants.

THÉORÈME 4.

$$x \underset{M}{\prec} y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z)^- \geq \sum_{i=1}^n (y_i - z)^- \quad \forall z \in \mathbb{R}_+$$

$$x \underset{L}{\succ} y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (z - x_i)^+ \leq \sum_{i=1}^n (z - y_i)^+ \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x \underset{P}{\succ} y$$

avec $(z - x)^+ = \max(z - x, 0)$. L'interprétation en termes de pauvreté est immédiate, puisqu'elle consiste à censurer la distribution au seuil de pauvreté z . L'écart $z - x$ est alors le montant de pauvreté, c'est-à-dire, le montant de revenu qu'il faudrait donner à l'individu qui dispose du revenu x pour que son revenu atteigne le montant de pauvreté z . En sommant ces montants de pauvreté sur toute la population, on obtient le budget dont il faudrait disposer pour éradiquer la pauvreté dans la population. La seconde équivalence établit donc que la dominance en termes de courbes de Lorenz est identique à la dominance en termes de montant de pauvreté, $\underset{P}{\succ}$.

4.2.3. Équivalence entre critère de Lorenz et critère de Pigou-Dalton

Muirhead établit dès 1903 l'équivalence entre le quasi-ordre de Lorenz et le quasi-ordre des transferts de Pigou-Dalton, deux ans avant l'émergence de la courbe de Lorenz en 1905 dans la littérature statistique ! Il n'établit toutefois l'équivalence que dans le cas restrictif où x et y sont des nombres entiers positifs.

$$x \underset{M}{\prec} y \Leftrightarrow x \underset{PD}{\succ} y$$

L'innovation importante est apportée par Schur [1923] avec la notion de matrice bistochastique. Une telle matrice A est une matrice carrée $n \times n$ d'élément générique (a_{ij}) telle que

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 & \forall i, j = 1, \dots, n \\ \sum_i a_{ij} &= 1 & j = 1, \dots, n \\ \sum_j a_{ij} &= 1 & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Définissons alors une nouvelle relation binaire $\underset{B}{\prec}$ par l'existence d'une matrice de passage bistochastique entre la distribution dominée et la distribution dominante.

$$x \underset{B}{\succ} y \Leftrightarrow \exists A \text{ matrice bistochastique telle que } x = yA$$

La notion de matrice bistochastique est intimement liée à la notion de transfert de Pigou-Dalton à travers les matrices de transfert.

DÉFINITION 4. Une matrice de transfert $T = \lambda I + (1 - \lambda)P_{ij}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, I la matrice unité et P_{ij} la matrice de permutation associée à la transposition des indices i et j .

LEMME 1. *Un transfert progressif entre j et i est réalisé entre y et x ssi $x = yT$.*

On peut établir alors :

$$x \succ_B y \Leftrightarrow \exists T_1, \dots, T_n \text{ matrices de transferts tel que } x = y \prod_{m=1}^M T_m$$

Les transferts peuvent être choisis de manière à préserver l'ordre. On voit ainsi que la notion de matrice bistochastique permet la traduction matricielle de principe de transferts de Pigou-Dalton. Ainsi moins de 10 ans après l'énoncé par Dalton de son principe, les mathématiciens en offraient une écriture mathématique compacte. Mais ni les uns ni les autres n'étaient au courant de leurs recherches respectives.

Tous les ingrédients sont posés pour énoncer le théorème de Hardy-Littlewood-Polya (H-L-P).

THÉORÈME 5. *Soient x et y dans le simplexe unité. Les cinq conditions sont équivalentes*

$$x \succ_W y$$

$$x \succ_{PD} y$$

$$x \succ_L y$$

$$x \succ_P y$$

$$x \succ_B y$$

Ce théorème fonde la définition d'un indice d'inégalité basé sur le respect du critère de Lorenz.

5. EXTENSION : TROUVER DES QUASI-ORDRES MOINS PARTIELS QUE CELUI DE LORENZ

Le théorème de H-L-P correspond à une condition sur la dérivée seconde de la fonction d'utilité. On peut vouloir pousser l'exercice au delà, ce qui permet de classer plus de distributions au prix, cependant, d'une perte de robustesse. Shorrocks et Foster en 1987 ont montré que cela avait un sens au moins à l'ordre 3, c'est-à-dire, en exigeant une condition sur la dérivée troisième de la fonction d'utilité. Ils ont obtenu une équivalence du type Hardy-Littlewood-Polya qui n'est cependant pas complète.

Requérons désormais des fonctions d'utilité servant à établir des comparaisons de bien-être que l'utilité marginale décroisse à taux décroissant ($u''' > 0$). Le préordre bien-être traduit une aversion à l'inégalité chez les pauvres. Les deux auteurs prouvent l'équivalence entre les trois préordres suivants.

(i) $x \succ_W y$ pour toutes les fonctions d'utilité respectant $u' \geq 0$, $u'' \leq 0$ et $u''' \geq 0$;

(ii) $x \succ_{PD+FACT} y$: x peut se déduire de y par une suite finie de transferts et de FACTs :

Un FACT est un transfert composé d'un transfert progressif dans le bas de la distribution

et d'un transfert régressif dans le haut de la distribution qui préserve la variance ;

(iii) $x \succ_{PP} y$: la somme des carrés des montants de pauvreté pour x est plus petite que pour y .

On note l'absence d'une condition de type Lorenz dans cette liste. Cela ne doit rien au hasard. Les préordres de dominance établis à partir de la fonction inverse de la fonction de répartition, ce qui est le cas de la courbe de Lorenz, divergent à partir de l'ordre 3 des préordres de dominance établis à partir de la fonction de répartition (dominance stochastique).

On peut poursuivre l'exercice plus loin et chercher à établir l'équivalence entre critère de bien-être et principe de transferts à l'ordre n . C'est l'entreprise réussie par Fishburn et Willig en 1984.

Le principe très général de transfert fait intervenir la transformation $T^1(\alpha, x, \delta)$ qui est un incrément de δ au niveau de revenu x pour une proportion α de la population. Un transfert de Pigou-Dalton peut se définir comme :

$$T^2(\alpha, x, \delta) = T^1(\alpha, x, \delta) - T^1(\alpha, x + \delta, \delta)$$

Par récurrence, on définit :

$$T^{n+1}(\alpha, x, \delta) = T^n(\alpha, x, \delta) - T^n(\alpha, x + \delta, \delta).$$

Le théorème suivant établit l'équivalence entre la dominance bien-être lorsque les conditions exigées sur les dérivées partielles successives alternent jusqu'à l'ordre n et un principe de transfert général jusqu'à l'ordre n .

THÉORÈME 6. *Les deux préordres suivants sont équivalents :*

$$(i) \quad x \succ_{W_n} y$$

La classe de fonction d'utilité est telle que les dérivées partielles alternent de signe jusqu'à l'ordre n .

$$(ii) \quad x \succ_{\cup_{i=1}^n T_i} y$$

x peut se déduire de y par une suite finie de tout type de transferts jusqu'à l'ordre n .

À la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, la condition de bien-être est équivalente à la dominance pour la classe de fonction exponentielle négative :

$$\sum_{i=1}^n e^{-ax} \geq \sum_{i=1}^n e^{-ay}, \quad \forall a > 0$$

Mathématiquement, l'exponentielle négative est utilisée dans un indice d'inégalité proposé par Kolm [1976(b)].

Pour terminer, j'évoquerai trois exemples de problèmes de partage sur lesquels les économistes essaient d'obtenir des généralisations du théorème de H-L-P et qui constituent des champs de recherche.

EXEMPLE 3. Distribution de revenu entre individus hétérogènes :

$K = \{1, \dots, l, \dots, k\}$ classes de besoin avec u_k la fonction d'utilité dans la classe de besoin k

$$N = \cup_{l=1}^k N_l, \quad N_l \cap N_{l'} = 0 \quad \forall l \neq l'$$

$$C = \mathbb{R}_+$$

$$X = \mathbb{R}_+^N \text{ ou } X = \{x \in \mathbb{R}_+^N / \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

EXEMPLE 4. Distribution multidimensionnelle :

$$N = \{1, \dots, n\}.$$

$$\text{Ensemble des biens } M = \{1, \dots, j, \dots, m\}$$

$$C = \mathbb{R}_+^m$$

$$X = \mathbb{R}_+^{nm}$$

Une distribution : une matrice $x = (x_{ij})$

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^{nm} / \sum_{i=1}^n x_{ij} = A_j; \quad \forall j = 1, \dots, m\}$$

EXEMPLE 5. Distribution d'ensemble d'opportunités :

$$N = \{1, \dots, n\}.$$

$$\text{Ensemble des biens } M = \{1, \dots, j, \dots, m\}$$

$$C = \{O_1, O_2, \dots\} : \text{une famille de sous-ensembles compacts non vides de } \mathbb{R}_+^m$$

$$X = C^N$$

En général, on ne rencontre pas trop de problèmes pour obtenir des équivalences entre les critères de bien-être et ceux établis en termes de montants de pauvreté. Par contre on n'obtient que des résultats parcellaires pour l'équivalence en termes de transformations élémentaires ou en termes de généralisations de courbes de Lorenz. Les résultats élégants en termes de matrice bistochastique ne se transposent pas aisément. Le domaine des inégalités multidimensionnelles constitue une sorte de paradis perdu [Trannoy, 2006].

En conclusion, la théorie de la mesure de l'inégalité offre un démenti cinglant à la citation en exergue d'Alfred Marshall selon laquelle il n'y a pas place en économie for "long strains of deductive reasoning". Elle offre également un exemple de plus où les mathématiciens ont obtenu des résultats sans soupçonner leur formidable possibilité d'application dans un autre domaine de la connaissance. Il faut toujours se méfier des grands esprits à la fin de leur vie scientifique, ils ont tendance à adopter des points de vue assez conservateurs.

BIBLIOGRAPHIE

- AMIEL Y., COWELL F. (1992), "Measurement of income inequality: experimental test by questionnaire", *Journal of Public Economics* 47, p. 3-26.
- ATKINSON A.B. (1970), "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory* 2, p. 44-263.
- BENTHAM J. [1822], *First Principle preparatory to Constitutional Code*, [collected works of Jeremy Bentham], ?, Philip Schofield (ed.), 1989.
- BERGE C. (1960), *Topologie, espaces multivoques, convexité*, Paris, Dunod.
- DALTON H. (1920), "The measurement of the inequality of incomes", *Economic Journal* 30, p. 348-461.
- DASGUPTA P., SEN A.K., STARRETT D. (1973), "Notes on the measurement of inequalities", *Journal of Economic Theory* 6, p. 180-187.
- EDGEWORTH F.Y. [1881], *Mathematical Psychics: a essay on the application of mathematics to the moral science*, London, Kegan Paul.
- FISHBURN P.C., WILLIG R.D. (1984), "Transfer principles in income distribution", *Journal of Public Economics* 25, p. 323-328.
- HARDY G.H., LITTLEWOOD J.E., POLYA G. (1934), *Inequalities*, Cambridge, Cambridge University Press.
- KARAMATA J. (1932), « Sur une inégalité relative aux fonctions convexes », *Publication mathématique de l'Université de Belgrade* 1, p. 145-148.
- KOLM S.C. (1969), "The Optimal Production of Social Justice", *Public Economics*, J. Margolis and S. Guitton (eds), London, Macmillan.
- KOLM S.C. (1976(a)), "Unequal Inequalities", *Journal of Economic Theory* 12, p. 416-442.
- KOLM S.C. (1976(b)), "Unequal Inequalities II", *Journal of Economic Theory* 13, p. 82-111.
- LEBRETON M. (1986), *Essais sur les fondements de l'analyse économique des inégalités*, Thèse d'état, Rennes.
- LORENZ M.O. (1905), "Methods of measuring the concentration of wealth", *Journal of the American Statistical Association* 9, p. 209-219.
- MARSHALL A.W., OLKIN I. (1979), *Inequalities: Theory of majorization and its application*, Academic Press.
- MUIRHEAD R.F. (1903), "Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters", *Proceedings Edinburgh Math. Society* 21, p. 144-157.
- ROTHSCHILD M., STIGLITZ J.E. (1970), "Increasing risk: I. A definition", *Journal of Economic Theory* 2, p. 225-243.
- PIGOU A.C. (1912), *Wealth and Welfare*, Macmillan.
- SEN A. (1973), *On Economic Inequality*, Oxford, Clarendon Press.
- SHORROCKS A.F., FOSTER J.E. (1987), "Transfer sensitive inequality measures", *Review of Economic Studies* 54, p. 485-497.
- TRANNOY A. (2006), "Multidimensional egalitarianism and the dominance approach: a lost paradise", *Inequality and Economic Integration*, F. Farina and E. Savaglio (eds), Routledge, p. 282-302.