

---

**Y. Gauthier, "Logique et fondements des mathématiques", Paris, New York, Diderot, 1997, 174p., bibliographie de 120 titres**

*Y. Gauthier, "Logique et fondements des mathématiques", Paris, New York, Diderot, 1997, 174p.*

**Jean-Pierre Ginisti**



**Electronic version**

URL: <http://msh.revues.org/2767>  
ISSN: 1950-6821

**Publisher**

Centre d'analyse et de mathématique  
sociales de l'EHESS

**Printed version**

Date of publication: 1 décembre 1997  
ISSN: 0987-6936

**Electronic reference**

Jean-Pierre Ginisti, « Y. Gauthier, "Logique et fondements des mathématiques", Paris, New York, Diderot, 1997, 174p., bibliographie de 120 titres », *Mathématiques et sciences humaines* [Online], 140 | Hiver 1997, Online since 10 February 2006, connection on 22 November 2016. URL : <http://msh.revues.org/2767>

---

The text is a facsimile of the print edition.

## BIBLIOGRAPHIE

GAUTHIER, Y., *Logique et fondements des mathématiques*, Paris, New York, Diderot, 1997, 174 p. bibliographie de 120 titres, 3 pages et demie d'exercices (sans corrigés). Absence d'index.

Le but essentiel de l'ouvrage est d'analyser la «problématique des fondements» (p.3), qui constitue sa deuxième partie, mais il commence par une présentation de la métalogue qui occupe une soixantaine de pages, et parce qu'elle en est indissociable. L'auteur, Professeur de logique mathématique à l'Université de Montréal, refond ainsi et actualise deux ouvrages de lui qui sont bien connus *Méthodes et concepts de la logique formelle*, 2<sup>ème</sup> éd. 1981, et *Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie constructiviste*, de 1976.

La première partie rappelle les éléments principaux de la théorie des ensembles, puis expose les grands résultats de la métalogue (métathéorème de [la] déduction, de complétude, de consistance), d'abord pour la logique des connecteurs, ensuite pour la logique des quantificateurs. Dans le cadre de celle-ci, est traité du (méta)théorème de Lindenbaum, des notions d'interprétation (que l'auteur préfère nommer «structure») et de modèle. Il peut alors présenter le théorème de Löwenheim-Skolem, la notion d'isomorphisme entre modèles et celle de catégoricité, les types de modèles, le théorème de compacité, la décidabilité d'un système et la décidabilité d'une formule (mais il n'expose pas les liens qui joignent les deux décidabilités). L'auteur montre alors l'incomplétude de l'arithmétique récursive exprimée dans une logique du 1er ordre, en reprenant à sa manière les résultats de Gödel.

Le cheminement suivi est donc assez habituel, mais il est bien effectué et entraînant pour tout lecteur déjà exercé à la pensée formelle.

La première partie s'achève par quelques ajouts sur la thèse de Church, la machine de Turing, la métalangue. L'auteur a raison de penser que «l'essentiel y est, même s'[il a] parfois résumé une argumentation, écourté une preuve ou énoncé un théorème (secondaire) sans donner sa preuve» (p.2). Nous ferons sur cette première partie quelques critiques de détail :

1) La morphologie d'un système formel, en logique des connecteurs, donne, p.16, «des symboles d'énoncés  $A, B, C, \dots, P, Q, R$ , etc. (ou les minuscules correspondantes)», puis énonce que «tout symbole d'énoncé  $P, Q, \dots$ » est une formule bien formée. Qu'en est-il donc des «symboles d'énoncés  $A, B, C, \dots$ »? (Il en va à peu près de même, p.24, pour la morphologie de la logique des quantificateurs). D'autre part, la possibilité de faire intervenir des «minuscules correspondantes» n'est pas une variante typographique, mais se trouve en relation avec le niveau de la langue utilisée. Il est donc discutable d'attendre les pp.62-63 pour présenter la distinction langue-objet / métalangue qu'on suppose dans ce qui précède.

2) Le sens de «tautologie» devrait être rappelé et non supposé.

3) L'auteur conclut un développement en écrivant exactement, p.22, «donc taut  $\square \sqsupset$  (où  $\square$  est le symbole d'équivalence logique)». Il est clair qu'une telle notation est cursive et non mathématique. Il faudrait : taut ( $P$ )  $\square \sqsupset P$ , voir  $\models P \square \sqsupset P$ . On ferait des remarques semblables pour l'expression «complétude  $\square$  (vrai  $\equiv$  théorème) ou (validité [logique]  $\equiv$  prouvabilité)» de la p.36. On peut contester aussi la phrase «si  $\square \sqsupset P$ , alors  $\square \models P$ , où  $\models$  signifie «valide» ou «vrai», en note, p.29, puisqu'on obtiendrait « $\square$  vrai  $P$ » qui n'est pas un énoncé. Dire : tout modèle de  $\square$  est modèle de  $P$  conviendrait mieux (l'exposé venant d'expliquer ce qu'est un modèle).

4) p.37 en 2.3, le «pour cela» deviendrait plus clairement «pour établir cela, quand il y a lieu».

5) La note de la p.23 expose d'une façon inexacte la manière dont on prouve, dans le cadre de la logique des connecteurs, l'indépendance d'un axiome. Il est dit qu'on procède en introduisant «une valeur de vérité additionnelle» dans les tables de vérité (supposées d'abord bivalentes) des connecteurs, puis en montrant que pour un système donné, «certains axiomes sont valides, alors que l'axiome indépendant ne l'est pas». En réalité, il est essentiel de voir qu'on ne recourt pas à quelque multivalence et que tous les autres axiomes (non pas «certains») doivent être valides (et pour une propriété de validité dûment stipulée). D'autre part, l'exemple donné note 0, 1, 2 l'ensemble des valeurs dans les tables modifiées, mais comme on a employé jusqu'ici la notation  $V, F$ , on ne peut pas dire ce qui est «additionnel» dans les tables modifiées. D'ailleurs, aucun des éléments 0, 1, 2 n'est vraiment tel puisque si les deux valeurs originales étaient 0, 1, leurs négations seraient 1, 0 (alors que la table donnée à  $\sim P$  pose 1, 1) ; si les deux valeurs originales étaient 0, 2, leurs négations seraient 2, 0 (alors que la table pose 1, 0) ; si les deux valeurs originales étaient 1, 2, leurs négations seraient 2, 1 (alors que la table pose 1, 0). On recompose donc plus qu'on n'ajoute. L'auteur remarque que la méthode s'adapte aux logiques multivalentes «pour un nombre indéfini de valeurs de vérité». «Quelconque» éviterait l'ambiguïté de «indéfini».

6) Définir, p.25, «portée d'un quantificateur» par «suite de symboles auxquels il s'applique» n'est pas irréprochable. Puisque la p.24 nomme «quantificateurs» les deux entités  $\forall, \exists$ , un quantificateur ne s'applique qu'à la variable qui le suit (et non pas, par exemple, à  $P(x_i)$  dans  $\forall x_i P(x_i)$ , comme on le souhaiterait).

7) «Négacomplet» et «complet syntaxiquement» sont définis pour un système  $S$ , mais les définissants comportent  $S_1$  au lieu de  $S$  (note, p.30).

8) On trouve en multiples occurrences, pp.44, 59, notes 16, 62, 63, etc., l'expression «ausi (*sic*) et seulement si» pour «aussi». Nous conjecturons un télescopage dans «aussi» de «ssi» abrégant «si et seulement si» !

La Partie II précise dans un développement liminaire comment l'auteur perçoit la «problématique des fondements» (pp.66-70). Soit, en bref :

- Elle «n'est plus exclusivement hantée par la paradoxologie ou par la non-contradiction de l'analyse classique», comme à l'époque de Hilbert, mais son problème est toujours «celui de [l'] objectivité [des mathématiques], du fondement objectif de leur certitude», p.100.
- Face aux méthodes dont dispose la logique, il serait anachronique de renvoyer ce problème à une philosophie arbitrale tirant ses arguments de la tradition ou de simples analyses conceptuelles.
- La philosophie intervient cependant parce que «les fondements ont aussi pour fonction de situer les mathématiques dans le panorama des activités théorétiques», p.66. En conséquence,
- «Le style fondationnel contemporain est inextricablement logique, mathématique et philosophique (et historique)», p.67.
- «Du côté mathématique, on peut distinguer essentiellement trois théories fondationnelles : théorie des ensembles, intuitionnisme et [moins ouvertement] théorie des catégories», p.67. La suite du livre examine successivement les prétentions de chacune de ces approches. On aimerait, certes, que soit plus manifeste le «côté philosophique», mais le titre de l'ouvrage limite le projet de manière acceptable.

- Le chapitre 4 commente les axiomes de Zermelo-Fraenkel pour la théorie des ensembles. Leur problème essentiel demeure celui de la consistance, mais Y. Gauthier doute qu'elle puisse être établie en raison des moyens non constructifs qui y sont mis en oeuvre. Les contributions importantes sont les résultats de Gödel sur la consistance relative de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix, et ceux de Cohen sur leur indépendance. Il en expose les grandes lignes. Il reproche à la théorie des ensembles a) de totaliser des multiplicités non finies comme on totalise celles qui sont finies ; b) de fonder trop vite la certitude mathématique sur un réalisme «hypothétique» des entités – sémantique des modèles, platonisme et théologie chez Cantor, admission de  $\exists x \in A (Px) \quad \exists x \in A (\sim Px) -$ . En cela, il fait sienne la critique intuitionniste (post-brouwerienne) qui «admet des constructions linguistiques abstraites [plutôt que mentales] comme fondements des mathématiques», p.100.

Le chapitre 5 s'ouvre sur le rejet du tiers exclu puis expose richement les notions de construction, de suite (régulière, irrégulière, de choix), et de sujet créateur qui forment l'armature de la critique intuitionniste. Comme dans son ouvrage de 1976, l'auteur se déclare constructiviste et sous une forme plus radicale qu'au sens intuitionniste. Il nomme «effinitiste» sa position (contrairement à l'infinitisme, elle s'adresse à des ensembles arbitrairement grands mais finis, et contrairement au finitisme elle n'exclut pas les concepts abstraits, mais elle exige hors du fini les mêmes lois ou opérations que dans le fini. Elle admet la notion de «procès multidimensionnel» contre le seul «ordre temporel linéaire» reconnu par Brouwer). Il y a pp.124-127 des allusions suggestives à Brouwer, Platon, Kant qu'on aimerait voir un jour développées par l'auteur. La distinction anticonformiste de Kreisel entre «fonction humainement computable et fonction mécaniquement computable», p.107, mériterait une ample discussion. Le chapitre 6 revient sur le rôle fondationnel de la théorie des modèles (liée au réalisme ensembliste), de la théorie de la récursion (qui a perdu aujourd'hui son caractère constructiviste) et de la théorie des démonstrations (qui le conserve).

La fin de l'ouvrage porte (d'une façon qui nous paraît trop rapide) sur «la théorie des catégories et la théorie des topoi comme langages fondationnels». La première voudrait remplacer la théorie des ensembles, et la notion de topos (qui généralise celles de topologie et d'espace topologique) a été articulée avec la logique intuitionniste, ce que l'auteur analyse. Il voit surtout dans ces approches, semble-t-il, des reformulations.

Nous ajouterons quelques remarques sur cette partie II :

- 1) On aimerait savoir, p.97, en quoi la relation ensembliste d'appartenance peut être dite «proche parente» de la relation platonicienne de participation.
- 2) Obtenir pour une assertion un résultat d'indépendance (par exemple celle de l'axiome du choix) est-ce prouver qu'elle «n'est pas située dans le bon contexte ou que le problème n'est pas bien posé» ? (p.99), ce qui impliquerait qu'on ne peut pas avoir deux assertions pertinentes distinctes.
- 3) La p.100 objecte aux positions classiques qu'on ne peut pas «déterminer la mesure de certitude des énoncés mathématiques, s'il suffit de définir les êtres mathématiques pour qu'ils *soient* ? ». À vrai dire, qui le croirait ? Sans être (au moins) prouvée consistante, la définition laisse virtuelle l'existence.
- 4) Il manque un '□' après '□' dans la première formule p.105.

5) Est-il sûr qu'on puisse «démontrer facilement la complétude de la logique propositionnelle intuitionniste» ? (p.105), alors qu'il semble difficile d'établir strictement que le modèle pour lequel il y a complétude représente bien les idées intuitionnistes.

6) Si on peut vraiment «produire des contre-exemples intuitionnistes pour des théorèmes classiques», p.111, *e.g.* pour celui de Bolzano-Weierstrass «un des nombreux contre-exemples que Brouwer a donné de théorèmes de l'arithmétique et de l'analyse classiques», pp.121-122, comment la cause n'est-elle pas entendue en faveur de la sévérité intuitionniste ?

7) «Le domaine des principes constructifs n'est pas parfaitement délimité», dit la p.122. Précisons qu'il ne pourrait pas l'être sans aggraver le réalisme des entités en un réalisme encore plus aventureux des opérations.

8) La phrase «pour l'analyse non standard, voir l'ouvrage standard de A. Robinson», p.131, note, nous semble malencontreuse !

9) La logique combinatoire est citée dans la note 6, p.137, comme une théorie particulière des systèmes formels. Son investigation de la «prélogique» fondatrice, sa parenté avec l'intuitionnisme, son opposition à l'ensembliste seraient des alliés pour l'auteur.

Ces remarques et ces questions montrent avant tout l'intérêt que nous avons pris à la lecture de l'ouvrage dont les mérites sont grands puisqu'il est à la fois une bonne synthèse des acquis et une présentation de thèses personnelles. Le matériel utilisé est imposant, le style bien adapté au sujet. Sans omettre de donner les termes originaux, l'auteur a le souci fort louable d'employer des équivalents français (par exemple «contraintes» pour «forcing conditions»). La mise en page est aérée et très soignée.

Jean-Pierre GINISTI.