

Malthus ou Boserup : validité et continuité historique des modèles démo-économiques

Malthus and Boserup turned upside down: the odd story of demo-economics modelling

Hervé Le Bras



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/msh/2890>

DOI : 10.4000/msh.2890

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 1 décembre 2003

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Hervé Le Bras, « Malthus ou Boserup : validité et continuité historique des modèles démo-économiques », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 164 | Hiver 2003, mis en ligne le 18 février 2006, consulté le 21 septembre 2021. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2890> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.2890>

DOSSIER «**DEMOGRAPHIE MATHEMATIQUE**»

– 3 –

MALTHUS OU BOSERUP : VALIDITE ET CONTINUTE HISTORIQUE
DES MODELES DEMO-ECONOMIQUES ¹Hervé LE BRAS²

RESUME – *Malthus qui n'était pas un mathématicien a fourni une description courte mais élaborée du rapport entre ressources, population et progrès technique dont on a retenu la célèbre opposition des deux progressions arithmétiques et géométriques. Quetelet puis Verhulst, en tentant de donner une expression plus mathématique aux idées de Malthus les ont simplifiées et déformées. Les économistes modernes, de Solow à R.D. Lee ont accentué cette dérive. Pour que les mathématiques puissent «passer» et respecter l'orthodoxie économique, ils ont déformé un peu plus l'idée originale de Malthus jusqu'à l'inverser pour l'opposer aux idées d'Ester Boserup, elles aussi inversées pour les besoins de la cause. Cette dérive n'est sans doute pas limitée au modèle malthusien ou boserupien mais montre le danger fréquent en mathématiques sociales de préférer l'élégance mathématique et le respect des théories en vigueur au simple déroulement des faits, et plus précisément de croire qu'en introduisant le temps t dans les équations, on traduit la dynamique profonde des phénomènes.*

MOTS-CLES – Population, Subsistances, Malthus, Boserup, Démo-économie

SUMMARY – *Malthus and Boserup turned upside down: the odd story of demo-economics modelling*
Malthus was not a mathematician but he provided in few sentences a very fine view of the relationship between population, resources and technical improvement, a view summarized in the well-known competition between arithmetical and geometrical progressions. After him, Quetelet and Verhulst formulated a more mathematical view at the expense of the true process envisioned by the English scholar. More recently, the economists, starting with Solow until R.D. Lee went further away from Malthus's ideas in the name of mathematics and mainstream economics. In fact, we see in this paper, they went as far as to inverse the scheme of Malthus into its opposite, putting in face of it a "boserupian" model, itself inverting the ideas of the great agrarian and human scientist, Ester Boserup. Such a process, where elegant mathematics respects more the current social theory than the crude facts, is quite illustrative of a way of dealing with social and economic dynamics by introducing the time in the formulae instead of coping with the complexity of the reality. In this case, progress in mathematics is paralleled with loss of contact with the real world.

KEYWORDS – Population, Resources, Malthus, Boserup, Demo-economics

¹ Article reçu le 15 avril 2003, révisé le 07 juillet 2003, accepté le 21 juillet 2003.

² Laboratoire de démographie historique, École des hautes études en sciences sociales, 54 bd Raspail 75270 Paris cedex 06, e-mail : lebras@ehess.fr

Il est naturel de penser qu'une modélisation s'améliore au fil du temps car chaque auteur tire avantage des travaux de ceux qui l'ont précédé et affine les concepts qu'il emploie. Dans le cas du modèle malthusien qui décrit la concurrence de la population et des ressources, on serait tenté de voir au contraire une déperdition de la pertinence du modèle initial formulé par Malthus aux chapitres 1 et 2 de son célèbre *Essai sur le principe de population* paru en 1798³.

LE MODELE DE MALTHUS

Dès le premier chapitre de l'Essai, Malthus pose les deux principes fondamentaux qui lui semblent guider l'évolution des populations□

Je pense pouvoir poser franchement deux postulats□

- *Premièrement que la nourriture est nécessaire à l'existence de l'homme□*
- *Deuxièmement, que la passion réciproque entre les sexes est une nécessité et restera à peu près ce qu'elle est à présent.⁴*

De ces deux principes, il donne aussitôt une expression mathématique□

*Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique.
Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique.*

Comme on le verra bientôt, la seconde phrase aurait dû être complétée comme la première par une condition, à savoir□ quand la population a dépassé le niveau des subsistances. Les progressions géométriques et arithmétiques ne décrivent pas la dynamique de l'interaction entre population et subsistances, mais seulement certaines de ses phases. Il faut attendre la fin du chapitre 2 pour que l'articulation complète soit expliquée□

Nous supposons que dans un pays donné, les moyens de subsistance soient juste suffisants pour entretenir sans peine les habitants. La poussée constante de la population, que l'on voit se manifester même dans les sociétés les plus dissolues, accroît le nombre des hommes avant que les moyens de subsistance ne se soient accrus. Par conséquent la nourriture qui auparavant faisait vivre 7.000.000 d'hommes doit maintenant être répartie entre 7.500.000 ou 8.000.000. Les pauvres vivent alors nécessairement beaucoup plus mal et nombre d'entre eux sont réduits à une extrême misère. Le nombre des travailleurs étant également en excès par rapport à l'emploi disponible sur le marché, le prix du travail ne peut qu'avoir tendance à baisser□ tandis que, dans le même temps, le prix des produits alimentaires tend à monter. Le travailleur doit donc se donner plus de peine pour gagner autant qu'auparavant. Pendant cette période de misère, les raisons de ne pas se marier et la difficulté d'entretenir une famille sont si grandes que la population stagne. Dans le même temps, le bas prix du travail, l'abondance des travailleurs, et la nécessité où ils sont d'intensifier leur activité, incitent les agriculteurs à employer plus de main d'œuvre sur leurs terres, afin d'opérer de nouveaux défrichements et de fumer et amender plus à fond ce

³ Malthus, *An Essay on the principle of population*, Londres, 1798 (traduction française la plus récente, Paris, Ined, 1980).

⁴ Malthus□*Essai, op. cit.*, p.24.

qui est déjà en culture jusqu'à ce qu'enfin, les moyens de subsistance redeviennent à la mesure de la population comme ils l'étaient à la période initiale. La condition du travailleur étant alors à nouveau satisfaisante, les entraves à l'accroissement de la population se relâchent dans une certaine mesure, et ces mêmes mouvements de recul et de progrès du bien-être se répètent.⁵

La description est suffisamment précise pour qu'on la traduise en termes actuels par des graphiques où l'on fait figurer la marche de la population et celle des subsistances. En suivant mot à mot le texte, on commence par une phase où la population s'accroît géométriquement (exponentiellement) et où les subsistances totales demeurent constantes (cf. Figure 1, p. 48). Après le croisement des deux courbes, quand les subsistances ne suffisent plus, la population continue à croître jusqu'à s'arrêter net et «stagner». À ce moment, les subsistances commencent à croître arithmétiquement (linéairement) jusqu'à ce qu'elles atteignent le niveau de la population stagnante. A l'issue de cette troisième phase, on se retrouve donc dans la position du début de la seconde phase si bien que l'oscillation de ces deux phases se perpétue comme l'annonce le texte de Malthus.

Une première variante peut être imaginée car il n'est pas clair que l'investissement agricole commence seulement à l'issue de la seconde phase. Il peut débiter dès que la population dépasse les subsistances, donc au début de la seconde phase comme on l'a représentée sur la Figure 2 (p. 48). Une telle interprétation justifie la progression arithmétique régulière des subsistances postulée par Malthus au chapitre 1 en contraste avec l'alternance d'avancées et de stagnations de la population. A *contrario*, on ne voit pas quelle force pousserait la population à s'accroître au-delà de la limite des subsistances. Si elle réagit immédiatement en travaillant aux investissements, c'est qu'elle se trouve déjà dans l'état de manque qui la contraint à stagner.

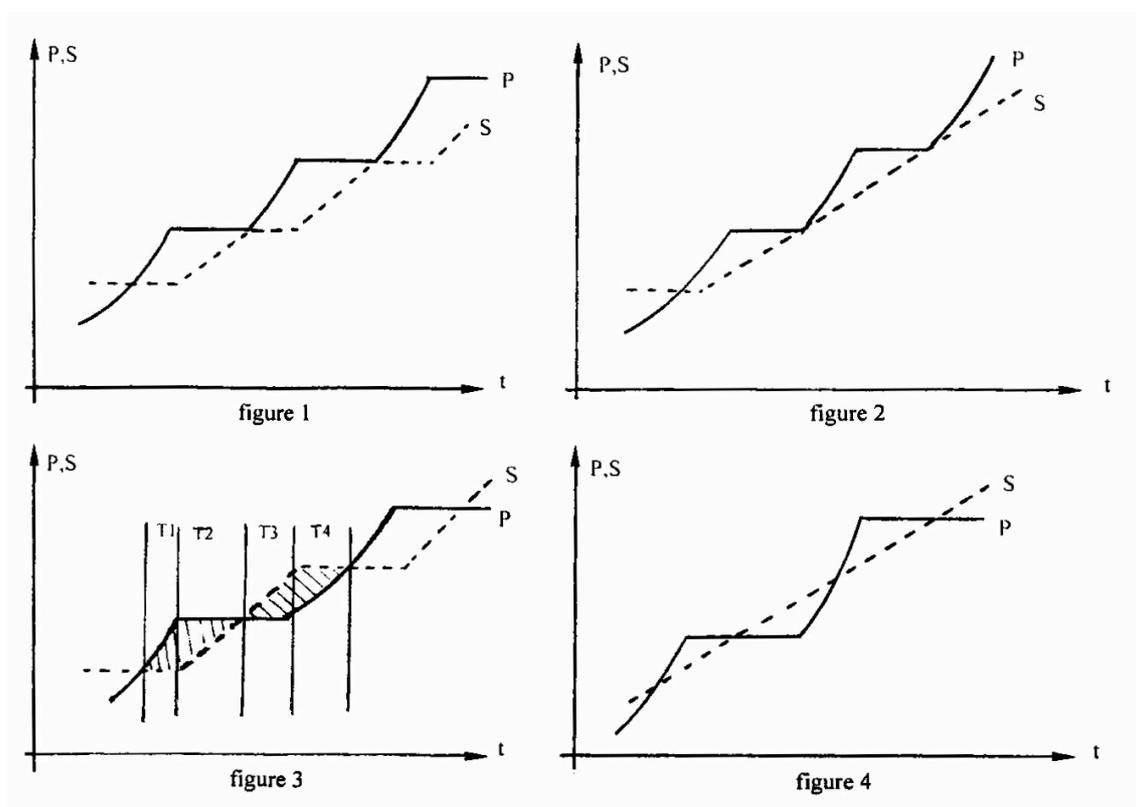
Dans les deux cas, on voit que la population est toujours au dessus des subsistances ou au mieux égale. Ceci est en accord avec la conclusion annoncée par Malthus dès la fin de son premier chapitre

En conséquence, si les prémisses sont justes, le raisonnement aboutit à réfuter la perfectibilité de la masse de l'humanité.

Mais, en moyenne, la population est toujours au dessous du niveau des subsistances, ce qui empêche à terme sa survie. Que se passe-t-il en effet quand la population dépasse la limite des subsistances? Elle entre dans une période de «misère» dit Malthus. C'est à dire qu'elle vit sur ses réserves biologiques (les travailleurs maigrissent) ou économiques (la baisse des stocks de produits alimentaires et le sacrifice du cheptel). Il faut tôt ou tard reconstituer ces réserves sinon les travailleurs mourront littéralement de faim. On est ainsi conduit à postuler un mécanisme de stockage représenté par la première phase des deux figures et de déstockage au cours des phases deux et trois. Ceci donne alors la Figure 3 (p. 48) dans laquelle la subsistance stockée durant la première phase est dépensée durant les deux suivantes. Les aires hachurées sont donc égales. C'est seulement quand les réserves corporelles et alimentaires sont reconstituées que la population peut reprendre sa croissance. Même si la figure est plus compliquée que les précédentes, on voit que l'oscillation ne dépend que d'un seul paramètre, l'intervalle de temps T1 pendant lequel la population dépasse

⁵ Malthus, *Essai, op. cit.*, p.31.

les subsistances sans commencer à investir. Une fois T_1 connu, l'intervalle de temps T_2 au cours duquel l'investissement a repris et où la croissance des subsistances permet de rejoindre les besoins de la population stagnante est connu. De même l'intervalle de temps T_3 au cours duquel les réserves sont reconstituées détermine T_4 durée du retour à l'équilibre de la population et des subsistances. Comme le stockage et le déstockage sont aussi importants (aires identiques sur la Figure 3), cela s'exprime par une relation entre (T_1, T_2) et (T_3, T_4) qui achève de déterminer les paramètres en fonction de T_1 . Il est légitime d'admettre que T_1 ne varie pas d'une oscillation à la suivante, car cela signifie que le nouveau de stockage ne change pas. En augmentant T_1 , on accroît le « bien-être » de la population (mesurée par les subsistances disponibles par habitant) mais on n'évite pas le retour des périodes suivantes de crise qui sont au contraire plus longues et plus graves.



Figures 1 à 4

Évolution de la population (P) et des subsistances totales (S) au cours du temps (t) selon différentes possibilités d'interprétation du chapitre 2 de l'*Essai* de Malthus

On peut enfin imaginer (Figure 4) que l'investissement commence dès que la crise se déclare, comme dans le cas de la Figure 2). On a alors une croissance linéaire des subsistances sans interruption et une oscillation de la population tantôt au dessus, tantôt au dessous du niveau des subsistances. La durée de l'oscillation demeure constante si la population maximale atteinte à chaque stade est une fraction donnée des subsistances, par exemple 25 %, ce qui signifie que le bien-être chute à 80 % de son niveau d'équilibre.

Les deux dernières figures restent en accord avec la description de l'oscillation et avec l'expression mathématique des deux principes posés dans le premier chapitre de l'*Essai*. Mais alors que des principes permettent en général de décrire un processus, par exemple la chute des corps à partir des lois de la mécanique, ici, ils sont insuffisants à engendrer la description. Cette dernière les respecte parfaitement □ croissance géométrique de la population quand elle est inférieure à la limite des subsistances et croissance linéaire des subsistances soit quand les stocks sont faibles (périodes T1 et T4 de la Figure 3, p. 48) soit en permanence (Figure 4, p. 48), mais elle nécessite les nombreuses hypothèses supplémentaires énoncées par Malthus dans son deuxième chapitre.

La difficulté à comprendre la démarche de Malthus vient du fait qu'il n'a pas adopté une démarche analytique à partir de lois générales, mais un système algorithmique sélectionnant des lois correspondant aux différents états entre lesquels il évolue selon un système de règles ou de conditions. Dans la méthode analytique, le temps devient une variable passive qui peut éventuellement être éliminée lors de la résolution du système d'équations. Dans le système algorithmique, le temps n'est plus une variable, mais l'indicateur de la succession des états. Cette distinction est assez abstraite quand on la fait en termes généraux. Pour la préciser, comparons l'algorithme correspondant à la Figure 3 (p. 48) à un modèle analytique, celui de la croissance logistique.

L'ALGORITHME DE LA FIGURE 3

- Si la population n'a plus de réserves, elle demeure constante et les subsistances croissent en progression arithmétique au taux p .
- Si la population a des réserves elle s'accroît en progression géométrique au taux r et les subsistances demeurent constantes.
- Durant chaque unité de temps, la variation des réserves S vaut $Y - kP$ où Y mesure les subsistances et P la population.

Ces éléments suffisent à prévoir l'évolution de la population et des subsistances à partir d'un état initial caractérisé par les trois valeurs (S_0, P_0, Y_0) .

LA LOI LOGISTIQUE

Le taux de croissance de la population dP/Pdt décroît en fonction linéaire de la population □

$$dP/Pdt = r - bP$$

En résolvant cette équation différentielle simple, on trouve une loi logistique □

$$P(t) = r K e^{rt} / (1 + b K e^{rt})$$

On peut aussi exprimer le résultat de l'algorithme de la Figure 3 sous forme de formules pour les trois variables S, P, Y , mais beaucoup moins simplement. L'avantage d'une formule est qu'on peut en déduire certaines propriétés générales. Par exemple dans le cas logistique, la population partira au voisinage de l'asymptote $P = 0$ pour tendre vers l'asymptote $P = r/b$. L'avantage de l'algorithme réside dans sa souplesse, donc son aptitude à suivre la situation réelle. Inversement, le modèle analytique correspondant demeurera schématique et il sera difficile de discuter les propriétés générales des résultats de l'algorithme.

Nous insistons sur l'existence de ces deux approches car elle explique en grande partie les contresens commis sur la théorie de Malthus. La plupart des auteurs n'ont retenu que l'opposition entre la croissance géométrique de la population et l'existence d'un plafond des ressources. Ils ont donc limité le modèle malthusien à la phase de croissance de la population suivie d'une brusque immobilisation au niveau de la limite des subsistances. Ils ont été aidés en cela par une malheureuse parabole que Malthus inséra dans la cinquième édition de l'*Essai* □ au banquet de la nature, il n'y a pas de place pour un convive supplémentaire.

Ayant négligé le raisonnement complet de Malthus au profit d'une historiette, ses successeurs sont revenus à la méthode analytique. Ils ont ainsi redécouvert difficilement et très approximativement ce qui était nettement postulé dans l'*Essai*.

QUETELET

Dans *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale*, Quetelet⁶ a sans doute le premier appelé une mathématique des populations. Il résume d'abord l'*Essai* de Malthus en le déformant □

Le grand obstacle à la population est donc le manque de nourriture, provenant de la différence des rapports que suivent ces deux quantités dans leurs accroissements successifs.

Quand une population, dans son développement, est parvenue au niveau des moyens de subsistance, elle doit s'arrêter à cette limite par la prévoyance des hommes, ou si elle a le malheur de la franchir, elle s'y trouve forcément ramenée par un excès de mortalité.

Ayant ainsi simplifié et refaçonné la théorie de son devancier, Quetelet a beau jeu de le critiquer □

Il faut l'avouer cependant, malgré les recherches du savant anglais et des économistes qui ont marché sur ses traces, le mode d'action des obstacles n'a point été nettement établi. On n'a pas déterminé la loi en vertu de laquelle ils agissent □ en un mot on n'a pas donné le moyen de transporter la théorie des populations dans le domaine des sciences mathématiques, auquel elle semble spécialement devoir appartenir.

À la suite de ses nombreuses recherches, dit-il, il est arrivé à la conclusion que *la théorie des populations peut se réduire aux deux grands principes suivants* □

- *La population tend à croître selon une progression géométrique.*

- *La résistance ou la somme des obstacles à son développement est, toutes choses égales d'ailleurs, comme le carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître.*

On retrouve dans le premier principe de Quetelet, l'expression mathématique du second principe de Malthus. En revanche, le second principe de Quetelet ne souffle mot des subsistances, objet du premier principe malthusien. Il le remplace par une extension des lois de la physique, en fait utilisée en mécanique pour décrire l'action des forces de

⁶ A. Quetelet, *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale*, Paris, Bachelier, 1835.

frottement. L'alliance de l'économie et de la mécanique lui semble du meilleur augure pour la qualité de ses principes□

De sorte que, des deux principes que je prends pour bases de la théorie mathématique de la population, l'un est généralement admis par tous les économistes, et l'autre a été vérifié dans toutes les applications où l'on avait à considérer le mouvement et des obstacles agissant d'une manière continue.

Remarquons que rien ne garantit que l'association de deux principes cohérents admis dans deux domaines différents soit cohérente. L'analogie avec les principes malthusiens est en outre trompeuse. Quetelet appelle principe ce qui n'était chez Malthus que l'une des conséquences mathématiques possibles d'une loi très générale énoncée sous forme non mathématisée. Affirmer que *la passion réciproque entre les sexes est une nécessité et restera à peu près ce qu'elle est à présent* est différent de postuler que *la population tend à croître selon une progression géométrique*. Dans le premier cas, la loi exprime un rapport nécessaire qui découle de la nature des choses pour parler comme Montesquieu. Dans le second, elle affirme une régularité mathématique sans la justifier. Dans le premier cas, la raison courante pousse à admettre la loi. Dans le second il faut croire en une structure mathématique cachée du monde, ce qui est moins évident. Ces *distingo* devraient cependant s'effacer devant l'efficacité des conséquences observables des lois.

Or, curieusement Quetelet ne résout pas le problème mathématique qu'il a posé avec ses deux principes ou du moins il n'en donne pas le résultat se contentant de déclarer□

J'ai donc cru devoir examiner, avant tout, les conséquences auxquelles la théorie devait conduire, et j'ai eu la satisfaction de les trouver entièrement conformes aux résultats de l'expérience.

La théorie n'était cependant pas difficile à établir, compte tenu des connaissances de l'époque en calcul différentiel□ la force de développement de la population, donc sa dérivée seconde est égale à r fois sa dérivée première (conséquence de la croissance exponentielle) diminuée de b fois le carré de la dérivée première (ou «*nitese*»)□

$$P'' = r P' - b(P')^2$$

En posant $U = P'$, on retrouve l'équation différentielle d'une loi logistique dont la solution s'écrit□

$$P' = r K e^{rt} / (1 + b K e^{rt})$$

Puisque le numérateur est la dérivée du dénominateur, l'intégration de P' est immédiate□

$$P = P(0) + \log((1 + b K e^{rt}) / (1 + b K))$$

Quand le temps t devient grand, la population P tend vers une asymptote□ de pente r et d'équation :

$$P = P(0) + \frac{1}{b + rt} \log(b K / (1 + b K))$$

Il est intéressant de retrouver le résultat du modèle malthusien, mais Quetelet ne s'en est pas aperçu puisqu'il conclut son analyse en ces termes□

Si le développement (de la population) a lieu au milieu d'obstacles de toute espèce qui tendent à l'arrêter, et qui agissent d'une manière uniforme, c'est-à-dire si l'état social ne change point, la population n'augmente pas d'une manière indéfinie mais elle tend de plus en plus à devenir stationnaire.

Quetelet parle aussi d'une limite qu'on ne peut pas dépasser mais contre laquelle on ne vient pas brusquement se heurter. Selon lui, la limite dépend de la société considérée par l'intermédiaire d'un *coefficient d'aisance* qui incorpore la consommation individuelle de ressources et l'état des techniques, ce qu'il désigne par *force productrice*. Confronté au plafonnement de sa loi logistique, Raymond Pearl parviendra au même constat un siècle plus tard en notant l'asymptote supérieure *upper limit of the present cycle*, ce qui laissait la possibilité de déclenchement d'un autre cycle qu'il avait effectivement imaginé dans le cas de l'Allemagne.

Là où Malthus cherchait à suivre les phénomènes qu'il avait sous les yeux, Quetelet au contraire raisonne abstraitement. Alors que Malthus ne pouvait pas mettre ses observations sous forme entièrement mathématique, Quetelet ne parvient pas à ce que ses mathématiques rejoignent la réalité. L'analogie entre l'évolution d'une population et la trajectoire d'un mobile est injustifiée. Elle repose sur la substantialisation de la notion de population qui devient un être pérenne dont la position à un moment donné est le nombre de ses membres tout comme un mobile existe en lui-même comme objet et à chaque instant se trouve en un lieu donné. Chez Malthus, la population est encore une simple mesure, le nombre des habitants dans un espace donné indépendamment de toute caractéristique nationale, sociale ou autre. Elle n'est donc pas comparable à un mobile. Chez Quetelet, elle est devenue une entité indépendante de sa mesure et assimilable à son terme moyen, le fameux «l'homme moyen» dont il est l'inventeur. Dans la seconde partie de sa *Physique sociale*, il s'intéresse à la courbe de croissance de l'homme. La courbe de l'évolution du nombre d'habitants est alors comparable pour la population à celle du poids pour l'individu. C'est peut-être aussi la raison pour laquelle il a tant insisté sur la limite stationnaire de la population. Pas plus qu'un organisme ne peut croître indéfiniment, une population ne peut se développer sans atteindre une limite. C'est aussi la raison pour laquelle il s'est trompé sur les conséquences de ses deux principes. Par une ironie de l'histoire, un de ses disciples, Verhulst⁷ va découvrir quelques années plus tard la loi logistique. Il procédera de la même manière que Quetelet, mais au lieu de postuler que la résistance à la croissance de la population croît comme le carré de sa vitesse, il supposera qu'elle est proportionnelle au carré de la population elle-même□

$$dP = (rP - b P^2)dt$$

C'est exactement la même équation que celle déduite des principes de Quetelet mais au lieu de s'appliquer à la vitesse, elle concerne directement la population. Pourquoi toutefois, le frein à la croissance de la population serait-il proportionnel à son carré□ Après Verhulst, plusieurs modèles simples ont justifié l'équation différentielle de la loi logistique. Tout d'abord, on peut la considérer comme un développement limité à partir de l'origine $P = 0$ en posant $P'(0) = r$ et $P''(0) = -2b$ plus sérieusement, on retrouve le plus simple des modèles épidémiologiques avec immunisation□ si P personnes sur les N que compte une population ont eu la maladie, elles peuvent la transmettre aux $N - P$ qui n'ont pas encore été contaminées. En supposant que chaque

⁷ P.F. Verhulst, «Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population», *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles* 20, 1847, p 1-32.

personne contaminée a la même probabilité pdt de contaminer chaque personne non contaminée durant le court temps dt, le nombre probable dP de personnes contaminées sur cette période sera□

$$dP = (N - P) P p dt = (Np P - p P^2)dt$$

Si on pose $Np = r$ et $p = b$, on retrouve exactement l'équation différentielle logistique. Le processus simple de territorialisation obéit à la loi logistique pour les mêmes raisons. Supposons en effet un espace de N territoires qui peuvent chacun être occupés par un individu seulement. Supposons que chaque individu a la probabilité pdt de donner naissance à un autre individu durant le temps dt. On affecte un territoire choisi au hasard à ce nouvel individu. Si le territoire est déjà occupé, le nouveau venu meurt, sinon il s'ajoute aux individus déjà présents. On peut vérifier qu'avec ces règles, le nombre probable de nouveaux territoires occupés suit l'équation différentielle de la loi logistique. Dans les deux dernières situations, le nombre total d'individus ou des territoires est donné à l'avance. Il est donc inévitable que la population des personnes contaminées ou des occupants de territoires plafonnent à ce nombre. La limite malthusienne n'est plus le résultat d'un processus, mais un postulat. À partir de cette époque, le terme de «malthusien□ deviendra synonyme de limité sans rapport direct avec la théorie de l'auteur de l'*Essai*. Il faudra une autre ironie de l'histoire pour que les modèles «malthusiens□ ultérieurs construits à l'instigation des économistes rejoignent par un long détour le processus initialement imaginé par Malthus.

LES ECONOMISTES□POPULATION ET NIVEAU DE VIE

Avec l'extension du formalisme, nous allons être contraint de fixer les désignations sans suivre chaque auteur particulièrement. Nous nous inspirerons pour cela de l'excellente thèse de Didier Blanchet⁸ en notant□

Y = produit total

P = population totale

K = capital productif total

G = multiplicateur du produit total tenant au progrès technique

À partir des années cinquante, les plus grands économistes, Solow, Samuelson, Arrow, Phelps, etc. vont se demander si la croissance démographique rapide qu'ils observent dans de nombreux pays pauvres est compatible avec une élévation du niveau de vie. En apparence, on revient à l'inspiration malthusienne, mais en apparence seulement. Il n'est plus question seulement de subsistances, mais de toutes les productions qui caractérisent ce que Quetelet nommait déjà le «degré d'aisance□ et dont il constatait la variété de pays à pays. Dans la tradition des modèles macro-économiques, on postule alors une fonction de production□

$$Y = f(K, P) G$$

Où f est homogène de degré 1 en K et P (absence d'effets d'échelle) et convexe en K et P (croissance relative de f en K ou P séparément plus faible que celle de K ou P respectivement). Reste à définir l'évolution de K, P et G d'une période à la suivante. Pour le capital, la variation est simplement le solde de l'épargne investie (avec un taux d'épargne constant) et de l'amortissement□

⁸ D. Blanchet, *Modélisation démo-économique*, Paris, INED-PUF, 1991.

$$K' = u Y - v K$$

La population est supposée s'accroître indépendamment de l'état économique, au taux r , soit \square

$$P'/P = r$$

Dans le modèle le plus simple, celui de Solow, on fait d'abord abstraction du progrès technique ($G = 1$). Le système des trois équations précédentes peut alors être précisé en calculant la dérivée logarithmique de K/P , le capital par tête \square

$$(K/P)'/(K/P) = K'/K - P'/P = u f(K,P)/K - v - r$$

Puisque par définition, $f(K,P)$ croît moins rapidement que K , le second membre s'annulera pour une certaine valeur de K/P . La dérivée de K/P deviendra nulle et l'on aura un point d'équilibre stable. K s'accroîtra en ce point au même taux r que P et donc aussi f . En l'absence de progrès technique, la production par tête est donc condamnée à stagner et la population à s'accroître exponentiellement.

Pour que la situation s'améliore, il faut un progrès technique. Dans le modèle de Solow⁹, on suppose qu'il est une fonction exponentielle du temps au taux s . Soit \square

$$G = e^{st}$$

$$\text{et } Y = F(K,P) e^{st}$$

Les 2 équations de croissance de K et de P restent les mêmes. Pour la première, on voit qu'une solution possible est exponentielle pour K et Y \square

$$K = a e^{wt} \quad Y = b e^{wt}$$

Pour P , on a naturellement \square

$$P = b e^{rt}$$

Du fait que la fonction de production est homogène de degré 1, on déduit \square

$$Y/K = F(1, P/K) e^{st}$$

d'où \square

$$F(1, P/K) = b/a e^{-st}$$

$$F(K/P, 1) = K/P F(1, P/K) = K b/a e^{-rt-st}$$

Puisque $F(K,P)$ croît avec K , la croissance de K doit être supérieure au terme exponentiel, donc \square

$$w > r + s$$

ce qui signifie que Y/P croît au moins au taux s et que le niveau de vie s'améliore. Il suffit donc d'un progrès technique même assez faible pour améliorer les conditions de vie de la population. À titre d'exemple, si F est une fonction de Cobb-Douglas \square $F = K^\alpha P^{(1-\alpha)}$ (avec $0 < \alpha < 1$). Les relations précédentes donnent \square

$$F(K/P, 1) = (K/P)^\alpha = K(b/a) e^{-rt-st}$$

⁹ R.M. Solow \square "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, 1956, p. 65-94.

D'où l'on tire la valeur w de l'exposant de K et Y :

$$w = (r + s)/(1 - \alpha)$$

Phelps et Arrow, chacun de leur côté, ont défini différemment l'impact du progrès technique mais parviennent aux mêmes résultats. Pour Phelps¹⁰, le progrès technique G est défini par une équation différentielle d'évolution :

$$G'/G = (P/G)^\beta$$

Les autres relations en Y , K' et P' restent les mêmes que chez Solow. On peut immédiatement résoudre les équations différentielles en P et G , ce qui donne :

$$G = (A + (\beta/r) e^{\beta r t})^{1/\beta}$$

G tend donc vers une exponentielle au taux démographique r et l'on est ramené au modèle de Solow avec progrès technique exponentiel.

Quant à Arrow¹¹, il postule un progrès par expérience accumulée donc proportionnel à l'intégrale de Y . L'équation du progrès technique G est alors :

$$G' = Y \quad \text{et} \quad Y = K^\alpha P^{(1-\alpha)} G^\beta$$

En supposant comme dans le cas du modèle de Solow des solutions exponentielles pour les quantités K , P , Y , on trouve que l'exposant s de Y/P vaut :

$$S = r \beta / (1 - \alpha - \beta)$$

Un accord des auteurs de la période de croissance des années 1950 et 1960 s'est donc dessiné pour estimer que la croissance démographique était compatible avec le progrès économique. C'était exactement la position inverse de celle de Malthus. Cependant, les approches économiques ne se souciaient pas de l'évolution de la population qu'elles considéraient comme exogène.

MALTHUS ET BOSERUP

La littérature économique plus spécialisée voit apparaître à la même époque des tentatives de traiter la croissance démographique de manière endogène qui vont trouver leur couronnement dans le travail de Ronald Lee en 1986¹². Pour l'exposer, nous commencerons par suivre l'exposé de Didier Blanchet¹³ en nous contentant de remplacer les fonctions spécifiées par des fonctions plus générales quand cela est possible. Le point de départ des modèles nommés « malthusiens » consiste à poser une fonction de production dépendant de la population P et du progrès technique G et de faire dépendre positivement la croissance de la population du revenu par tête $u = Y/P$:

$$Y = P^{(1-\alpha)} G \quad P'/P = \beta (Y/P)$$

¹⁰ E.S. Phelps, "Population increase", *Canadian Journal of Economics* I, 3, 1968, p. 497-518.

¹¹ K.J. Arrow, "The economic implications of learning by doing", *Review of Economic Studies*, XXIX, 1962.

¹² R.D. Lee, "Malthus and Boserup: a dynamic synthesis", *The State of Population Theory: forward from Malthus*, D. Coleman and R.S. Schofield (eds), Oxford, Basil and Blackwell, 1986, p. 96-130.

¹³ D. Blanchet, *op. cit.*

On en déduit immédiatement la dérivée logarithmique du revenu moyen $Y'/Y - P'/P = \sigma (Y/P) + G'/G$

$$Y'/Y - P'/P = \sigma (Y/P) + G'/G$$

Si G'/G est constant (progrès technique évoluant exponentiellement au taux s), le second membre de l'équation s'annule pour une seule valeur de Y/P puisque $\sigma (Y/P)$ est monotone croissante. Quelque soit la dose de progrès technique, la boucle positive entretenue avec la croissance démographique bloque le niveau de vie à une valeur constante. C'est ce que l'on qualifie de piège malthusien («malthusian trap»). Boulding¹⁴ a pu qualifier ce résultat de théorème sinistre. Parvenu à ce revenu constant, la valeur de P'/P est fixe mais en général différente de 0. La population s'accroît donc exponentiellement. Bien que ce modèle ait été constamment qualifié de malthusien, il en viole les principes et les résultats. Au lieu d'une croissance linéaire de la population, il maintient une croissance exponentielle ou géométrique dans les termes de Malthus. Il ne crée pas d'oscillations entretenues et aucune relation n'est explicitée entre l'accroissement des subsistances Y et le niveau du revenu moyen Y/P . On peut seulement réécrire sous forme différentielle l'équation de la fonction de production, soit compte-tenu de la relation $Y = P^{(1-\sigma)} G$:

$$Y' = (1 - \sigma) P^{-\sigma} G + G' P^{(1-\sigma)}$$

L'accroissement de la production totale tend à devenir proportionnel à une puissance de la population, ce qui n'est pas le cas dans le modèle malthusien pour lequel le progrès de la production est endogène. Afin de réintroduire cet aspect, il est devenu habituel de poser une relation entre le changement de progrès technique G' et le revenu moyen. Plus la pression des subsistances se fait sentir, plus on est incité à développer des nouveaux moyens de production. L'idée figure en toute lettre dans Malthus comme on l'a vu, mais on préfère l'attribuer à Ester Boserup¹⁵ dont le bel ouvrage consacré à la population et au progrès de l'agriculture défend l'idée de la pression créatrice : contraints d'accroître leur subsistance par leur nombre croissant, les agriculteurs inventent de nouvelles techniques et étendent leurs défrichages. L'aspect «Boserupien» du modèle se traduit donc par une équation sur le changement technique :

$$G'/G = \sigma (Y/P)$$

où

$$\sigma \text{ décroît quand } Y/P \text{ croît.}$$

Quand l'on ajoute cette équation au système malthusien, la résolution demeure la même en posant la dérivée logarithmique du revenu par tête :

$$Y'/Y - P'/P = \sigma (Y/P) + \sigma (Y/P)$$

Puisque σ s'accroît avec le revenu moyen passant d'une valeur négative à une valeur égale au taux maximum d'accroissement d'une population et que σ décroît de façon monotone, il existe un point d'équilibre pourvu que la limite inférieure de σ ne soit pas supérieure à σ fois le taux maximum de croissance démographique. Le revenu moyen tend alors à se stabiliser pendant que la population et le progrès technique évoluent chacun exponentiellement. On revient donc au théorème sinistre de Boulding.

¹⁴ K. Boulding, "The malthusian Model as a general System", *Social and Economic Studies*, 1955.

¹⁵ E. Boserup, *The Conditions of agricultural Progress*, New-York, Allen and Unwin, 1965.

En spécifiant les deux fonctions \square et \square , on peut obtenir une formulation explicite de l'évolution de P, G et Y. À titre d'exemple, posons à la suite de Blanchet

$$P'/P = a(\log(Y/P) - \log u_0)$$

$$G'/G = -b(\log(Y/P) - \log u_1)$$

On en déduit (voir les calculs en annexe)

$$P = P(0) e^{K \exp(- (a\square + b)t)} (u_1/u_0)^{abt / (a\square + b)}$$

$$Y = Y(0) e^{(1 - \square - b/a) K \exp(- (a\square + b) t)} (u_1/u_0)^{abt / (a\square + b)}$$

P et Y convergent très rapidement et régulièrement vers la solution d'équilibre dans laquelle ils sont dans le rapport fixe y

$$y = (u_1^b u_0^{a\square})^{1/(a\square + b)}$$

On peut maintenant poser deux questions générales deux siècles de modélisation démo-économique ont-ils amélioré, développé et précisé la pensée de Malthus? Ont-ils apporté une réponse plus conforme à la réalité des croissances économiques et démographiques?

Comparons pour commencer le dernier modèle à celui de Malthus. La croissance démographique est-elle limitée par les subsistances? Elle est réduite, mais le modèle est incapable de trancher entre une croissance exponentielle, une population stationnaire et une décroissance exponentielle. Tout dépend du rapport u_1/u_0 , donné *a priori*. D'autre part, on ne trouve jamais une croissance limite linéaire de la population et des subsistances comme dans la loi de Quetelet et la formulation de Malthus. La transformation d'une croissance démographique exponentielle en l'absence de contraintes en une croissance linéaire avec la contrainte des subsistances illustre la force de cette dernière. La loi de développement de la population se pliait à celle des subsistances. L'une des conséquences de la croissance linéaire était que le taux de croissance de la population tendait vers zéro alors qu'il reste constant dans les formulations modernes. Il est possible de réintroduire la croissance linéaire en posant l'équation du progrès technique sous la forme

$$G' = \square (Y/P)$$

où

$$\square \text{ décroît quand } Y/P \text{ croît.}$$

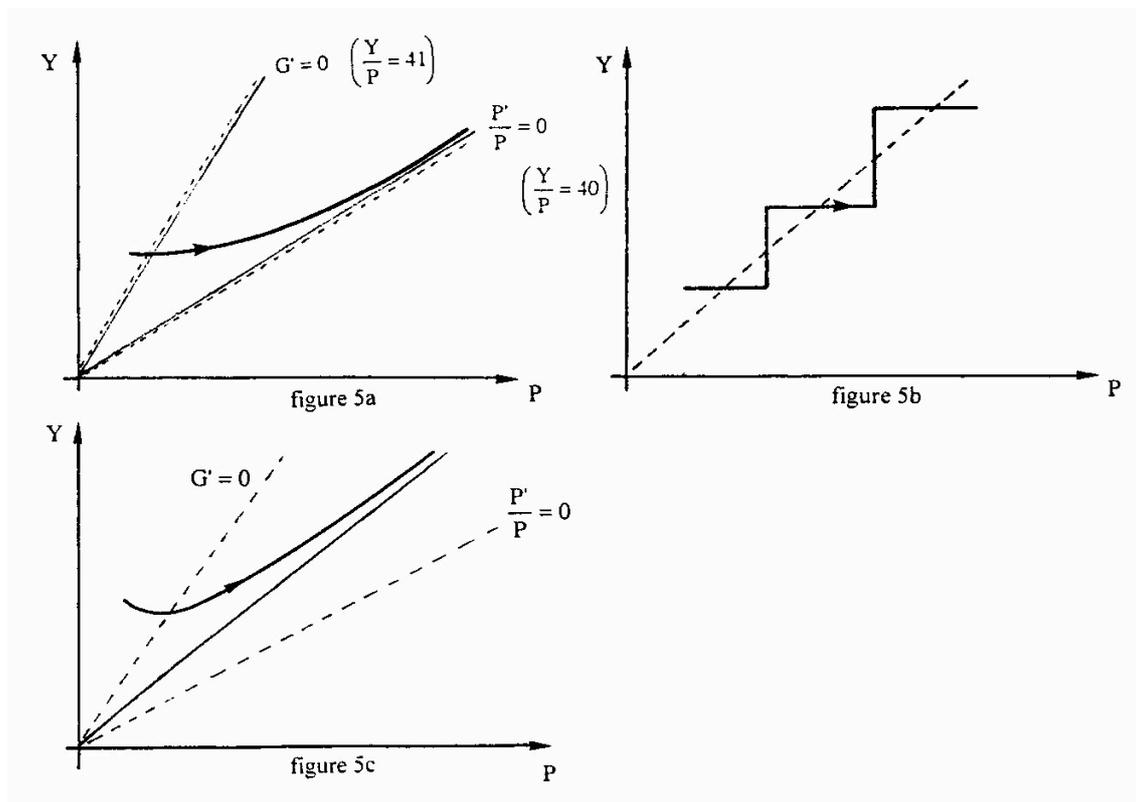
Le système d'équations est moins direct à étudier. On peut cependant raisonner assez facilement dans l'espace de phase, c'est-à-dire dans le plan de coordonnées P et Y où l'on peut inscrire la position du processus à chaque instant (Figure 5(a), p. 58). On a tracé deux droites limites qui correspondent aux deux valeurs de Y/P pour lesquelles les dérivées G' et P'/P s'annulent. Elles définissent ce que Ronald Lee nomme les zones boserupienne ($G' > 0$) où les ressources s'accroissent et malthusienne ($P'/P > 0$) où la population s'accroît. Si le processus est situé entre ces deux droites, il y demeure. Puisqu'à l'intérieur de ce domaine, Y/P reste compris entre deux limites, il existe au moins un point d'accumulation. Ce ne peut être que celui qui correspond à la limite malthusienne. Sinon, on aurait

$$P'/P = K$$

$$G' = c$$

$Y'/Y = G'/G + (1 - \square) P'/P = c/G + K$, ce qui est en contradiction avec le fait que la dérivée de Y/P donc $Y'/Y - P'/P$ tend vers zéro sauf si $K = 0$ et donc si l'on atteint la limite malthusienne. Dans ces conditions, le progrès technique s'accroît linéairement comme l'avait postulé Malthus ($G = e t + k$) mais, la population et le produit total croissent plus rapidement

$$P = ((et + k) Y_0/P_0)^{1/\square}$$



Figures 5(a) à 5(c)

Espace de phase avec la population P en abscisse et le produit total Y en ordonnée dans les modèles démo-économiques (5(a) et 5(c)) et pour le schéma malthusien de la Figure 3 (p.48)

L'espace de phase peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution du processus de Malthus. On a représenté ici le comportement de la quatrième forme qui avait été envisagée (Figure 5(b)). Elle présente une différence radicale avec la solution de 5 a et avec la solution du premier système d'équation résolu auparavant (Figure 5(c)). Les fluctuations ont disparu. Elles n'existent ni pour la forme gompertzienne de la figure 5 c comme on peut aussi le vérifier sur les formules, ni pour la version retouchée dans laquelle G' est fonction décroissante du produit par tête, Y/P (Figure 5(a)). La nature des équations différentielles empêche de franchir la droite limite de l'espace malthusien ($Y/P = u_0$) puisqu'au moment où la trajectoire arriverait à son contact, P' s'annulant, elle ne pourrait plus croître que selon Y donc positivement puisqu'on est dans la zone

boserupienne et s'écarterait de la droite limite vers le haut. Ainsi, la formulation moderne perd le rouage essentiel du mécanisme malthusien. La croissance de la population et des subsistances dans l'*Essai* ne suivait pas des lois de type physique comme en a ensuite cherché Quetelet, mais dépendait d'un mécanisme élémentaire clairement explicité. On peut donc répondre sans ambiguïté à la première question : les successeurs de Malthus jusqu'à aujourd'hui n'ont pas amélioré son modèle mais au contraire, ils ont supprimé les éléments qui en assuraient la cohérence.

Il n'y avait d'ailleurs aucune urgence à s'inscrire dans la ligne de Malthus puisque les conditions économiques et démographiques ont profondément changé. Malthus se situait dans une économie agricole dans laquelle il n'existait pas d'engrais minéraux. La croissance du produit ne pouvait qu'être lente et reposer sur des défrichements (bien qu'à son époque les enclosures aient eu tendance à réduire la surface des emblavures). Quetelet venait d'une Belgique en pleine fièvre industrielle. Solow, Arrow ou Phelps vivaient une période de croissance économique et démographique rapide où l'amélioration du niveau de vie était recherchée.

Le cas du modèle de Boserup est différent car il propose une interprétation de l'économie agricole traditionnelle (c'est-à-dire utilisant seulement les engrais organiques et la traction animale en plus d'outils simples tels haches et araires). Parler d'un modèle est d'ailleurs exagéré dans ce cas. Boserup ne propose rien qui corresponde à ce que la littérature a qualifié de «Boserupien». Elle n'affirme pas que le rythme du progrès technique augmente quand le revenu moyen baisse. Son idée est beaucoup plus simple et directe. Elle estime et le prouve sur de nombreux exemples que les agriculteurs ont à leur disposition tous les moyens traditionnels de culture depuis la jachère longue («lash and burn agriculture») jusqu'aux récoltes multiples grâce à un système d'irrigation en passant par les jachères courtes, les assolements biennaux et triennaux avec jachère puis sans jachère et les cultures annuelles. Selon la densité, donc la demande globale de vivres, la population d'agriculteurs optimise son temps de travail. Elle produit ce qui lui est nécessaire sans surplus en minimisant le temps occupé à la production, donc en choisissant les meilleures combinaisons des moyens de culture, par exemple à une certaine densité, jachère courte et potagers. Si l'on veut à tout prix formaliser cette idée, on écrira que le temps moyen T en heures que chaque agriculteur passe annuellement à travailler pour produire sa subsistance est fonction croissante de la densité :

$$T = f(S_0/P)$$

où S_0 désigne la surface totale disponible.

Le produit total reste proportionnel à la population : $Y = k P$ et en conséquence, le rendement par unité de surface s'accroît avec la population ($r = k P/S_0$) tandis que le rendement horaire des agriculteurs décroît ($r_1 = k/T$). Ce cadre n'a rien à voir avec l'équation dite boserupienne posée plus haut :

$$G'/G = \square (Y/P)$$

où \square décroît quand Y/P croît.

Si l'on prend la peine de lire la seconde partie du livre de Boserup, on en retire même une vision opposée. Elle montre en effet que la persistance de systèmes juridiques réglant l'utilisation du sol (modes de propriété et de location, partage des éléments du produit) au sein d'une communauté peut entraîner des blocages et donc des

crises de subsistances, ce qui est dans la ligne des résistances que la croissance des subsistances rencontre pour faire face à la croissance de la population. En poussant le bouchon un peu plus loin, on pourrait dire que les idées de Boserup sont proches de ce qu'on a pris l'habitude d'appeler malthusien et que le mécanisme imaginé par Malthus pour décrire l'extension de la production est de son côté très voisine de ce qu'on a choisi d'appeler «Boserupien» dans la littérature.

Pourquoi avoir invoqué des paternités abusives? Au premier degré, l'économiste qui est intéressé par les modèles dira que peu importe leur dénomination. Que la contrainte soit appelée du nom de Pierre ou de Paul ne change pas son énoncé sous forme d'équation différentielle. Nous ne partageons pas un tel scientisme. L'invocation d'ancêtres prestigieux est un moyen détourné de justifier et de légitimer les relations postulées dans le modèle et d'éviter la vérification de conditions essentielles de validité en faisant comme si les prestigieux ancêtres avaient procédé à cette vérification avec succès. C'est donc l'argument classique d'autorité qui resurgit sous cette forme.

Or pour qu'un modèle soit admis, au moins une des deux conditions suivantes doit être remplie ou bien il est justifié par une description fine des comportements des acteurs ou bien il fournit une description très précise des observations. Le modèle de Malthus satisfait le premier critère, au moins au regard des autres modèles démo-économiques. Quetelet tente d'utiliser le second critère en produisant à la suite de sa loi des exemples d'évolutions à long terme de certaines populations. Les modèles économiques du dernier demi-siècle ne satisfont à aucun des deux critères. Ils ne décrivent pas explicitement des comportements humains et ils ne rendent pas compte précisément des séries temporelles de population et de PNB disponibles dans de nombreux pays. On retire de cette histoire l'impression d'une évolution régressive. Au fil du temps, les modèles se sont éloignés des situations réelles au lieu de les serrer de plus près. Ils ont été sans doute victimes d'un formalisme mathématique (les équations différentielles) particulièrement bien adapté à la description des phénomènes physiques, mais non à celle des processus économiques et sociaux, et de logiques disciplinaires des modèles économiques justifiés tels que le système d'équations néo-classiques ne sont pas nécessairement capables d'intégrer la variable démographique.

ANNEXE □ MODELE MALTHUS-BOSERUP AVEC VARIATIONS EN FONCTION DU LOGARITHME DU PRODUIT MOYEN

Le système d'équations simultanées s'écrit dans ce cas particulier □

$$\begin{aligned} Y &= P^{(1-\alpha)} G \\ P'/P &= a(\log(Y/P) - \log u_0) \\ G'/G &= -b(\log(Y/P) - \log u_1) \end{aligned}$$

En extrayant $\log(Y/P)$ de chacune des deux dernières équations et en les égalant, on obtient une équation qui a une intégrale première immédiate □

$$\begin{aligned} 1/a(P'/P) + \log u_0 &= -1/b(G'/G) + \log u_1 \\ (P/P(0))^{1/a} &= (G/G(0))^{-1/b} (u_1/u_0)^t \end{aligned}$$

où $P(0)$ et $G(0)$ sont les valeurs de P et G au temps initial $t = 0$.

De l'intégrale première on peut déduire la valeur de G en fonction de P et de t et la reporter dans l'expression Y de la fonction de production. En divisant Y par P , on obtient alors une expression de Y/P en fonction de P et de t □

$$\begin{aligned} G &= G(0) (P/P(0))^{-b/a} (u_1/u_0)^{bt} \\ Y/P &= G(0) (P/P(0))^{-\alpha - b/a} / P(0)^{-b/a} (u_1/u_0)^{bt} \end{aligned}$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle de la croissance démographique, il vient □

$$P'/P = a(\log(G(0)) - (\alpha + b/a)\log(P) + b/a\log(P(0)) + bt\log(u_1/u_0) - \log u_0)$$

En posant $U = \log(P)$, $k = \log(G(0)) + b/a\log(P(0)) - \log u_0$, on a l'équation différentielle simple □

$$U' = -a(\alpha + b/a)U + k + a + \log(u_1/u_0)abt$$

Dont les solutions sont de la forme □

$$U = K e^{-(a\alpha + b)t} + ab\log(u_1/u_0)/(a\alpha + b)t + k_1$$

où □ $k_1 = (ab\log(u_1/u_0)/(a\alpha + b) - ka)/(a\alpha + b)$

Enfin, K est déterminé à l'origine par □

$$\log(P(0)) = K + k_1$$

soit □ $K = \log(P(0)) - k_1$

En remplaçant les facteurs intermédiaires par leur expression complète, on obtient la valeur de P en fonction du temps t □

$$P = P(0) e^{-\frac{(ab \log(u_1/u_0)/(a\alpha + b) - ka)/(\alpha + b/a)}{K} \exp(- (a\alpha + b) t) + ab \log(u_1/u_0)/(a\alpha + b) t + (ab \log(u_1/u_0)/(a\alpha + b) - ka)/(\alpha + b/a)}$$

et en simplifiant□

$$P = P(0) e^{K \exp(- (a\alpha + b) t)} (u_1/u_0)^{abt/(a\alpha + b)}$$

d'où□

$$G = G(0) e^{-b/a K \exp(- (a\alpha + b) t)} (u_1/u_0)^{\alpha abt/(a\alpha + b)}$$

et finalement□

$$Y = Y(0) e^{(1 - \alpha - b/a) K \exp(- (a\alpha + b) t)} (u_1/u_0)^{abt/(a\alpha + b)}$$